جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

طوبولوجيا (1)
ثانية رياضيات

الاسم :

الرقم :

السؤال الأول : 38 علامة

أ. عرّف الآتي: 1. جوار نقطة. 2. المجموعة المحدودة. 3. الفضاء المترابط.

ب. اعط تعريفين متكافئين لاستمرار التطبيق $f:(X,d)\to(Y,d')$ في النقطة x_0 من X.

ج. علّل الآتي:

1) داخلية مجموعة هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة فيها.

2) المجموعة المحدبة في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ مجموعة مترابطة.

3) مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ في الفضاء الحقيقي $\mathbb{R}$ غير مغلقة وغير مفتوحة وغير متراصة.

السؤال الثاني 28 علامة

نأخذ في الفضاء الحقيقي $\mathbb{R}$ المجموعة $A=[-1,0]\cup\mathbb{N}$، حيث $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية.

أ. أوجد A°، $\bar{A}$، A'، $Fr(A)$، $Ext(A)$.

ب. 1. هل المجموعة A كثيفة ولماذا؟ 2. هل الفضاء الجزئي A تام ولماذا؟

السؤال الثالث 34 علامة

أ. اعط مثالاً على مجموعتين A, B في الفضاء $\mathbb{R}$، بحيث $\overline{A\cap B}\neq\bar{A}\cap\bar{B}$

ب. أثبت أن أي مجموعة منتهية في فضاء متري هي مجموعة متراصة.

ج. لتكن A مجموعة جزئية في الفضاء المتري (X,d) و $x\in X$. أثبت أن النقطة x تكون نقطة تراكم للمجموعة A إذا وفقط إذا وجدت متتالية (x_n) من عناصر $A\setminus\{x\}$ متقاربة من x.

حمص في 2018/2/15

د. طالب غريبة

1

سلم تصحيح مقرر الطبولوجيا (1) س1

السنة الثانية - رياضيات

الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٧/٢٠١٨

السؤال الأول (٢٨ علامة):

أ- التعاريف: 1) نقول عن المجموعة $\mathcal{O}$ في الفضاء المتري (X,d) إنها جوار للنقطة x إذا وجدت كرة مفتوحة $B(x,r)$ مركزها x ونصف قطرها $r>0$ بحيث: $x\in B(x,r)\subseteq \mathcal{O}$ — 4

2) نقول عن مجموعة في فضاء متري إنها محدودة إذا أمكن احتواؤها في كرة مغلقة نصف قطرها عدد منته (أو إذا كان قطرها عدداً منتهياً) — 4

3) الفضاء المترابط هو الذي لا يساوي اجتماع مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين وغير متقاطعتين. — 4

ب- 1) نقول عن التطبيق f إنه مستمر في النقطة x_0 إذا تحقق: — 4

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0 : d(x,x_0)<\delta \Rightarrow d'(f(x),f(x_0))<\varepsilon$$

2) يكافئ ذلك: مهما تكن المتتالية (x_n) المتقاربة من x_0 تكن المتتالية $f(x_n)$ متقاربة من النقطة $f(x_0)$ — 4

أو: من أجل أي كرة مفتوحة $B(f(x_0),\varepsilon)$ توجد كرة مفتوحة $B(x_0,\delta)$ بحيث $f(B(x_0,\delta))\subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$ ...

جـ- التعليل: 1) لأن داخلية المجموعة تساوي اجتماع جميع المجموعات المفتوحة المحتواة فيها. — 4

2) لأن أي زوج من نقاطها محتوى في مجموعة جزئية مترابطة هي القطعة المستقيمة الواصلة بينهما. — 5

د) $\mathbb{Q}$ غير مغلقة لأنها لا تساوي لصاقتها حيث $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ — 3

$\mathbb{Q}$ غير مفتوحة لأنها لا تساوي داخليتها حيث $\mathbb{Q}^{\circ}=\Phi$ — 3

$\mathbb{Q}$ غير متراصة لأنها غير مغلقة وغير محدودة. — 3

السؤال الثاني (٢٨ علامة):

أ- $\overset{4}{A^{\circ}} =]-1,0[$ ، $\overset{4}{\bar{A}} = A$ ، $\overset{4}{A'} = [-1,0]$

$\overset{4}{Fr(A)} = \bar{A} \setminus A^{\circ} = \{-1,0,1,2,\ldots\}$ ، $Ext(A) = \mathbb{R} \setminus \bar{A} = \overset{4}{\mathbb{R} \setminus A}$

ب- 1) 4 المجموعة A ليست كثيفة لأنها ليست كثيفة في الفضاء ككل

2) 4 الفضاء الجزئي A تام لأن A مغلقة.

السؤال الثالث (٢٤ علامة):

أ-1- المثال: $A = \mathbb{Q}$ ، $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ فيكون $\overline{A \cap B} = \bar{\Phi} = \Phi$

بينما 7 $\bar{A} \cap \bar{B} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

ب- لتكن $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ تغطية مفتوحة كيفية للمجموعة المنتهية:

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ أي $A \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$. هذا يؤدي إلى أن

7 العنصر a_i ينتمي إلى إحدى مجموعات التغطية ولتكن U_{α_i} .

إن الأسرة المنتهية $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_n}$ تشكل تغطية جزئية

منتهية للمجموعة A ، وبالتالي A متراصة حسب التعريف.

ج- البرهنة:

1) لزوم الشرط 14

2) كفاية الشرط 6

د. طالة غريبة

حماة في ٢٠١٨/٢/١٠